

TENTAMEN CALCULUS 1, 22 OKTOBER 2008, 14:00–17:00

Schrijf op elk in te leveren blad je naam, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Alle (negen) opgaven tellen even zwaar. Het gebruik van boek(en), aantekeningen of een grafische rekenmachine is bij dit tentamen niet toegestaan.

- (1) [4 punten] Laat zien, dat voor elk positief geheel getal n de formule

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

geldt. Anders gezegd, de som $1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + \dots + 1/(n \cdot (n+1))$ is gelijk aan $n/(n+1)$.

- (2) [4 punten] Vind, in de gedaante $a + bi$, alle complexe getallen z die voldoen aan $z^3(z^2 - 2z + 1 + 2i) = iz^2 - 2iz + i(1 + 2i)$.

- (3) [4 punten] Gegeven is een oneven functie $f(x)$, en een primitieve $F(x)$ van $f(x)$. Toon aan, dat $F(x)$ een even functie is.

- (4) [4 punten] Bewijs met behulp van de ϵ - δ definitie, dat $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 3}$ continu is in $x = 1$.

- (5) [4 punten] Bepaal $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{1 - \cosh x}$.

- (6) Gegeven is de functie $f(x) = (x + \ln x)/x^2$. Voor elk getal $t \geq 1$ nemen we de rechthoek met hoekpunten $(0, 0)$ en $(t, 0)$ en $(0, f(t))$ en $(t, f(t))$.

(a) [2 punten] Naar welke limiet gaat de oppervlakte van deze rechthoek als $t \rightarrow \infty$?

(b) [2 punten] Wat is de maximale en wat de minimale oppervlakte die zo'n rechthoek kan hebben, voor $1 \leq t < \infty$?

- (7) [4 punten] Bepaal $\int_1^{\infty} \frac{3x - 1}{4x^3 - x^2} dx$.

- (8) [4 punten] Bepaal de lengte van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 - \frac{1}{3}x)$ voor $1 \leq x \leq 4$.

- (9) [4 punten] Geef een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(x+1)y' = x(y^2 + 1).$$